Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара

Волошко В.Л., Козакова Н.Л., Наконечна Т.В.

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ
ДО ВИКОНАННЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ
З ДИСЦИПЛІНИ «МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ БІОЛОГІЧНИХ СИСТЕМ ТА ПРОЦЕСІВ»

для здобувачів другого (магістерського) рівня вищої освіти

спеціальності 162 Біотехнології та біоінженерія

освітня програма: Біотехнології та біоінженерія

Дніпро 2023

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

Методичні рекомендації до виконання лабораторних робіт та контролю знань з дисципліни «Математичне моделювання біологічних систем та процесів» розроблено для забезпечення процесу вивчення дисципліни та отримання програмних результатів навчання здобувачами вищої освіти другого (магістерського) рівня вищої освіти спеціальності 162 Біотехнології та біоінженерія, освітньої програми «Біотехнології та біоінженерія» усіх форм навчання.

Методичні рекомендації на формування у здобувачів вищої освіти практичних навичок проведення лабораторних досліджень, поглиблення та закріплення теоретичних знань спрямовані.

При підготовці методичних рекомендацій використаний досвід інших вузів, наукова і методична література, основний список якої наводиться.

Порядок виконання та оцінювання лабораторних робіт

Перед початком лабораторних робіт викладач проводить інструктаж з техніки безпеки їх проведення і пожежної безпеки з оформленням у відповідних журналах і з підписами студентів. Студенти, які не пройшли інструктаж з техніки безпеки, до виконання робіт не допускаються.

Перед лабораторними заняттями викладач перевіряє опанування студентами теоретичної частини та методики виконання лабораторної роботи. Опитування студентів відбувається у формі співбесіди під час захисту лабораторної роботи.

З усіма теоретичними питаннями, що виникають у процесі виконання лабораторної роботи, студенти звертаються до викладача.

Кожна робота повинна бути захищена. Захист лабораторної роботи складається з уміння здобувача вищої освіти викласти основні теоретичні положення теми, методики дослідження, проаналізувати отримані результати та відповіді на контрольні питання.

Для перевірки роботи студент подає рукописний матеріал/машинний набір та електронний варіант документу (файл MS Excel), який буде мати наступну назву: ЛР№1_Прізвище студента_№_варіанту.

Вимоги, які викладач ставить перед студентом

Політика щодо дедлайнів та перескладання: лабораторні роботи, які здаються із порушенням термінів без поважних причин, оцінюються на нижчу оцінку. Перескладання відбувається за наявності поважних причин. Задаються дедлайни виконання лабораторних та самостійних робіт та перескладань.

Методичні настанови ґрунтуються на таких документах:

- Освітньо-професійна програма «Біотехнології та біоінженерія» другого (магістерського) рівня вищої освіти спеціальності 162 Біотехнології та біоінженерія
(https://www.dnu.dp.ua/view/osvitni_programy).
- Положення про організацію освітнього процесу в Дніпровському національному університеті імені Олеся Гончара
(https://www.dnu.dp.ua/docs/dnu/polozhennya/2021_poloz_osvit_proces_27_10.pdf)
- Положення про атестацію здобувачів вищої освіти та роботу екзаменаційної комісії Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара (нова редакція).
(http://www.dnu.dp.ua/docs/osvitnya/2020_Polozhennya_Atestacia_zdobuv_VO_Robota%20EK%20DNU.pdf).

Політика та принципи академічної доброчесності визначені у положенні про запобігання та виявлення фактів порушення академічної доброчесності у Дніпровському національному університеті імені Олеся Гончара
(http://www.dnu.dp.ua/docs/dnu/polozhennya/Polozhennya_Akadem_dobrochesnist'-2020.pdf).

Політика щодо відвідування: відвідування лекцій, лабораторних занять, а також відсутність на них, не оцінюється. Однак, студентам рекомендується відвідувати заняття, оскільки на них викладається теоретичний матеріал та розвиваються навички, необхідні для формування компетентностей, визначених освітньою програмою. Система оцінювання орієнтована на отримання балів за активність студента, а також виконання завдань, здатних розвинути практичні уміння та навички. За об’єктивних причин (наприклад, хвороба, працевлаштування, міжнародне стажування тощо) навчання може відбуватися в он-лайн формі за погодженням з викладачем. Захист завдань самостійної роботи проводиться на лабораторних заняттях.

Звіт про виконання лабораторної роботи має містити:

- титульний лист;
- номер варіанту та тему роботи;
- постановку індивідуального завдання;
- математичну постановку задачі;
- використані теоретичні відомості;
- отримані скрин-копії результатів;
- висновки.

Лабораторна робота № 1

Тема роботи: Статистична обробка результатів біологічного експерименту.

Мета роботи: Отримати навички зі статистичної обробки результатів спостережень для складання звітів та визначення прихованих закономірностей.

Теоретичні відомості

Як правило, спостереження здійснюється на численних об'єктах, які складаються з певних одиниць. Кожна така одиниця спостереження називається *варіантою* і позначається $x_1, x_2, ..., x_N$. Загальна кількість варіант статистичної сукупності має назву обсяг вибірки і позначається буквою N.

Значна частина статистичних досліджень пов'язана з описом великих сукупностей об'єктів. Якщо сукупність, що нас цікавить, дуже чисельна або її елементи малодоступні, або існують інші причини, що не дозволяють вивчати відразу всі її елементи, то звертаються до вивчення якоїсь частини цієї сукупності. Така частина сукупності, вибрана для повного дослідження усіх елементів, називається вибіркою або вибірковою сукупністю, а уся множина досліджуваних елементів називається генеральною сукупністю. Бажано сформувати вибірку таким чином, щоб вона щонайкраще представляла б усю генеральну сукупність, тобто була б репрезентативною.

При виборі одного об'єкту з N ймовірність вибору кожного елементу рівна $\frac{1}{N}$. Вибір n об'єктів з N вважається чисто випадковим, якщо всі набори з n об'єктів мають однакову ймовірність бути вибраними. Чисто випадковий вибір n об'єктів (випадкову вибірку об'єму n) можна отримати, обираючи з генеральної сукупності по одному об'єкту послідовно і суто випадково. Порушення принципів випадкового вибору може привести до непрезентативності вибірки.

Першим етапом аналізу результатів вимірювання є *ранжування*, яке передбачає розміщення матеріалу вибірки в один ряд за зростанням і розбиття його на k класів.

Далі необхідно визначити величину класового інтервалу λ:

$$\lambda = \frac{R}{k} = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{1 + \log_2 n},$$

де R – розмах вибірки або діапазон мінливості; для визначення числа k часто використовують формулу Стерджеса $k = 1 + \log_2 n$, де n – об'єм вибірки.

Якщо виявиться, що λ=1, то зібраний масив розподіляється в безінтервальний варіаційний ряд; якщо ж $\lambda \neq 1$, то вхідні дані необхідно розподіляти в інтервальний ряд.

При побудові інтервального варіаційного ряду слід робити так, щоб найменша варіанта сукупності попадала приблизно в середину першого класового інтервалу. Виконання цієї вимоги гарантує побудову варіаційного ряду, що найбільш повно відповідає природі досліджуваного явища, а отже, і найменші втрати інформації про точність статистичних характеристик ряду, що обчислюються.

Цій вимозі задовольняє така формула:

$$x_н = x_{\min} - \frac{\lambda}{2},$$

де $x_н$ – нижня границя першого класового інтервалу; $x_{\min}$ – мінімальна варіанта досліджуваного масиву даних; λ – величина класового інтервалу.

Визначивши класові інтервали, залишається розподілити по них усі варіанти масиву, тобто визначити частоти кожного класу. Тут виникає питання: у які класи відносити варіанти, що по своїй величині збігаються з верхньою межею одного і нижньою межею іншого, сусіднього класу? Слід поміщати варіанту в той клас, де вона співпадає з нижньою границею інтервалу і менше верхньої.

Наступний крок веде до заміни класових інтервалів на їх центральні або серединні значення. У результаті інтервальний варіаційний ряд перетворюється у безінтервальний ряд. Необхідність такої заміни обумовлено тим, що узагальнюючі числові характеристики (середня, дисперсія й ін.) обчислюються за безінтервальними рядами.

Серединні значення класових інтервалів $x_i,\ i = \overline{1,m}$, знаходяться від нижніх границь $x_н$ на величину, рівну половині класового інтервалу.

Найбільше точно центральну величину класового інтервалу *можна* одержати за формулою:

$$x_{i+1} = x_i + \lambda,\ \ i = \overline{1,n},$$

де $x_1 = x_н + \dfrac{\lambda}{2}$ – нижня границя інтервалів.

Якщо спостережені значення ознаки розташувати у порядку зростання, то отримаємо варіаційний ряд

x_1	n_1
x_2	n_2
…	…
x_k	n_k

де $n_i,\ i = \overline{1,k},$ – кількість спостережених значень ознаки, $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$ – об’єм вибірки; $x_i,\ i = \overline{1,k}$ – середини інтервалів.

При цьому значення x_i називають *варіантами*, n_i – їх *абсолютними частотами*, $w_i = \frac{n_i}{n}$ – їх *відносними частотами* або статистичними ймовірностями, а $\tilde{w}_i = \frac{w_i}{\lambda}$, $i = \overline{1,k}$, – їх щільностями на інтервалі. Накопичені частоти (*кумулятивні* частоти) обчислюємо так:

$$\overline{w}_i = \sum_{j=1}^{i} \tilde{w}_j, \ \ i = \overline{1,k}.$$

Для заданої вибірки статистичний ряд розподілу частот записують у вигляді таблиці (табл. 1.1).

Таблиця 1.1 – Розподіл частот варіаційного ряду

Середні значення класів	Абсолютні частоти	Відносні частоти	Щільності на інтервалі	Кумулятивні частоти
x_1	n_1	w_1	$\tilde{w}_1$	$\overline{w}_1$
x_2	n_2	w_2	$\tilde{w}_2$	$\overline{w}_2$
…	…	…	…	…
x_k	n_k	w_k	$\tilde{w}_k$	$\overline{w}_k$

Графічна інтерпретація варіаційних рядів.

Для більш наочного представлення закономірності варіювання кількісних ознак, варіаційні ряди прийнято зображувати у вигляді графіків. Так, при побудові графіку варіаційного ряду за віссю абсцис відкладають середні значення класів, а за віссю ординат – частоти. Висоти перпендикулярів, що відкладаються за віссю абсцис, відповідають частотам класів. З’єднуючи вершини перпендикулярів прямими лініями, одержують геометричну фігуру у вигляді багатокутника, що називається полігоном розподілу частот. Лінія, що з’єднує вершини перпендикулярів, називається варіаційною кривою або кривою розподілу частот варіаційного ряду.

Для побудови полігону частот в прямокутній системі координат наносять точки (x_i, n_i) або (x_i, w_i) і з’єднують відрізками прямих. Отримана лінія називається полігоном абсолютних частот вибірки або полігоном відносних частот.

Для зображення інтервальних рядів використовують діаграми, які називаються гістограмами. Для її побудови в системі координат на осі абсцис наносять точки $x_1, x_2, ..., x_k$. Потім будують прямокутники з основами $[x_{i-1}, x_i)$ і висотами n_i або w_i. Побудована східчаста фігура називається гістограмою частот (або відносних частот).

Якщо за віссю абсцис відкладати середні значення класів, а за віссю ординат – накопичені частоти із наступним з'єднанням точок згладженими лініями, отримаємо кумуляту. На відміну від варіаційної кривої, що має куполоподібну форму, кумулята має вигляд *S*-подібної кривої. Накопичені частоти знаходять послідовним підсумовуванням, тобто кумуляцією (від лат. cumulatio – збільшення, накопичення) частот у напрямку від першого класу до останнього класу варіаційного ряду.

Відкладаючи за віссю абсцис кумулятивні (накопичені) частоти, а за віссю ординат значення середин класів із наступним з'єднанням геометричних точок згладженими лініями, одержують графік, що називається огівою.

У порівнянні з емпіричними варіаційними кривими, що виглядають звичайно у виді ламаних ліній, кумулята й огіва мають більш обтічну форму. Ця особливість дозволяє в ряді випадків надавати перевагу цим графікам перед емпіричною варіаційною кривою. Такі графіки допомагають дослідникам миттєво оцінити розподіл частот тієї або іншої сукупності, а також зробити висновок щодо нормальності розподілу, або визначення домінуючих класів у ньому.

За допомогою кумуляти можна визначити, наприклад, середні дози біологічно активних речовин, що викликають ефект у 50% піддослідних індивідів. Огіва дозволяє одночасно порівнювати один з одним емпіричні розподіли, навіть за умови нерівного обсягу в них вхідних даних.

Приклад розрахунку варіаційного ряду.

Побудувати варіаційний ряд та його графіки для наступного масиву вхідних даних: 6; 2; 5; 7; 9; 15; 11; 7; 8; 10.

1. Знаходимо мінімальні та максимальні величини ($x_{\min}$ та $x_{\max}$) в масиві вхідних даних (кількість варіант: $n = 10$) та розраховуємо величину класового інтервалу за формулою:

$$\lambda = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{1 + 3{,}322 \lg n} = \frac{15 - 2}{1 + 3{,}322 \lg 10} \approx 3.$$

2. Для того щоб мінімальна варіанта масиву попадала в середину першого класового інтервалу, визначаємо його нижню межу за формулою:

$$x_н = x_{\min} - \frac{\lambda}{2} = 2 - \frac{3}{2} = 0{,}5.$$

3. Визначаємо центральну величину першого класового інтервалу за формулою:

$$x_1 = x_н + \frac{\lambda}{2} = 0{,}5 + \frac{3}{2} = 2.$$

Аналогічним чином, додаючи половину величини класового інтервалу до середини класу, отримаємо його верхню межу. Визначивши класові інтервали, розподіляємо по них усі варіанти масиву, тобто рахуємо частоти кожного класу. Результати розподілу заносимо у табл. 1.2.

Таблиця 1.2 – Розподіл класових інтервалів та їх частот

Клас	Нижня межа класу $>$	Середина класу $=$	Верхня межа класу $\le$	Частота класу	Кумулятивна частота класу
1	0,5	2	3,5	1	1
2	3,5	5	6,5	2	3
3	6,5	8	9,5	4	7
4	9,5	11	12,5	2	9
5	12,5	14	15,5	1	10
Сума частот $\sum f =$	–	–	–	10	–

За значеннями табл. 1.2 будуємо такі графіки: полігон, гістограму (діаграму), кумуляту та огіву розподілу варіаційного ряду (рис. 1.1).

Вибіркове середнє розраховується за наступною формулою:

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} x_i \cdot n_i,$$

де n – загальна кількість вимірювань, m – кількість класів.

Виправлена дисперсія характеризує розкид (відмінність) варіант щодо вибіркового середнього та розраховується за формулою:

$$S_x = \frac{\sum_{i=1}^{m} n_i (x_i - \overline{x})^2}{n-1} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{m} n_i (x_i^2 - 2x_i\overline{x} + \overline{x}^2) = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{m} n_i x_i^2 - 2\overline{x}^2 n + \overline{x}^2 n\right) =$$

$$= \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{m} n_i x_i^2 - \overline{x}^2 n\right) = \frac{n}{n-1}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} n_i x_i^2 - \overline{x}^2\right).$$

Зазвичай, чим більша величина вибіркової дисперсії, тим більше відхилення елементів вибірки від середнього. *Виправлене середньоквадратичне відхилення* – це міра мінливості ознаки (вираження ступеня розкиду даних), що визначається формулою:

$$\sigma_x = \sqrt{S_x},$$

а тому більш точно характеризує відхилення елементів вибірки від середнього.

Коефіцієнт варіації масиву розраховується за формулою:

$$C_x = \frac{\sigma_x}{\overline{x}} \cdot 100\%.$$

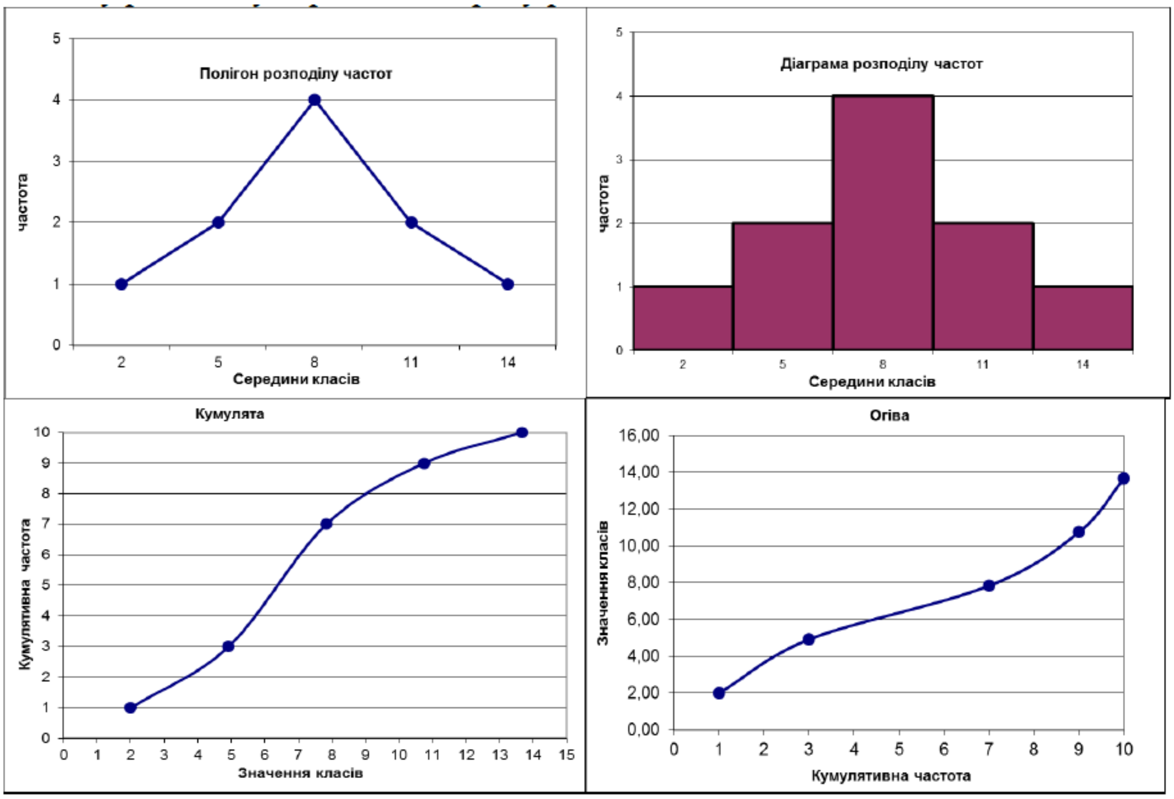


Рисунок 1.1 – Графіки варіаційного ряду

Різні вибірки характеризуються різними коефіцієнтами варіації. При сильно асиметричних рядах розподілу коефіцієнт варіації може досягати 100% і навіть вище. Варіювання вважається слабким, якщо коефіцієнт варіації не перевищує 10%, середнім, коли C_x складає 11–25%, і значним при C_x >25%.

Розходження між величиною вибіркової середньої і середньої генеральної сукупності називають помилкою репрезентативності, тобто помилкою, що допускається не в самому процесі виміру, а в результаті випадкового відбору варіант із генеральної сукупності.

Помилки отриманих характеристик вибірки визначаються за формулами

– для вибіркового середнього:

$$\Delta_{\bar{x}} = \frac{S_x}{\sqrt{n-1}};$$

– для виправленої вибіркової дисперсії:

$$\Delta_{S_x} = \frac{S_x}{\sqrt{2n}};$$

– для коефіцієнту варіації C_x:

$$\Delta_{C_x} = \frac{C_x}{\sqrt{2n}} \cdot \sqrt{1+\left(\frac{C_x}{100}\right)^2}.$$

Завдання. На прилеглій до гірничо-збагачувального комбінату території проводились довготривалі спостереження за вмістом нікелю в атмосферному повітрі. Результати спостережень наведені у табл. 1.3.

Студенти згідно номеру варіанту N за списком групи

– формують варіаційний ряд;
– зображують його графічно у вигляді полігону, гістограми, кумуляти та огіви розподілу частот;
– обчислюють вибіркове середнє спостережених даних, виправлене середньоквадратичне відхилення, коефіцієнт варіації та помилки отриманих характеристик;
– оформлюють та захищають звіт за вимогами, що наведені вище.

Таблиця 1.3 – Концентрація нікелю в атмосферному повітрі $(\text{мкг}/\text{м}^3)$

№	КН	№	КН	№	КН	№	КН	№	КН
1	7,5 +N	9	7,6+N	17	7,3+N	25	8+N	33	9,1+N
2	6,1+N	10	10,6+N	18	10+N	26	8+N	34	3,2+N
3	7+N	11	6+N	19	6,4+N	27	7+N	35	7,5+N
4	6+N	12	8,2+N	20	8,5+N	28	7,5+N	36	6,5+N
5	7,4+N	13	7,1+N	21	7+N	29	6,5+N	37	5,2+N
6	6,8+N	14	9,6+N	22	6,2+N	30	9+N	38	6,6+N
7	6,3+N	15	8,5+N	23	3,3+N	31	9,3+N	39	7,1+N
8	7,5+N	16	9,2+N	24	5,2+N	32	5,6+N	40	5,3+N

Контрольні питання для самоперевірки

1. Яка різниця між інтервальним та безінтервальним варіаційним рядом?
2. Опишіть побудову гістограми варіаційного ряду.
3. Чим відрізняється графік кумуляти від графіку огіви?
4. Вкажіть формулу розрахунку вибіркового середнього.
5. Поясніть термін «Виправлене середньоквадратичне відхилення».
6. Як визначаються помилки отриманих характеристик виборки?

Типові задачі

1. Визначали висоту рослин травостою на лучному газоні через тиждень після скошування.

Отримали наступні результати: 22; 23; 22; 22; 17; 23; 20; 20; 21; 25; 27; 24; 22; 21; 16; 23; 18; 21; 24; 18; 21; 22; 25; 23; 21; 20; 25; 18; 21; 21; 24; 25; 19; 18; 22; 25; 27; 19; 17; 18; 22; 23; 24; 19; 26; 21; 25; 25; 23; 27.

Розподіліть отриману сукупність в інтервальний варіаційний ряд. Побудуйте кумуляту та огіву розподілу варіаційного ряду.

2. Протягом року кількість вимірювань змінювалась таким чином

Місяць	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Кількість	7	8	9	10	7	8	7	8	11	9	10	8

Складіть частотну таблицю, побудуйте полігон та гістограму частот. Знайдіть вибіркове середнє та виправлене середньоквадратичне відхилення.

Лабораторна робота №2

Тема роботи: Регресійні моделі. Кореляційно-регресійний аналіз.

Мета роботи: закріпити теоретичні знання та отримати практичні навички використання програми Microsoft Office Excel для побудови лінійної регресійної моделі та її кореляційно-регресійного аналізу.

Теоретичні відомості

При оцінці ступеня взаємозв’язку статистичних величин важливо провести математичне моделювання, тобто підібрати аналітичний вираз, який відповідав би природі досліджуваного явища з метою передбачення поведінки незалежної характеристики об’єкта при зміні залежного параметра.

Функціональний зв’язок $y = f(x)$ кожному незалежному значенню змінної x ставить у відповідність єдине значення залежної змінної y.

Статистичною (стохастичною) називають таку залежність, за якою зміна однієї випадкової величини викликає певну зміну розподілу ймовірностей іншої. Зокрема, статистична залежність виявляється в тому, що зі змінюванням однієї величини змінюється середнє значення іншої. Така залежність називається *кореляційною* (англ. correlation— взаємозв’язок).

У теорії ймовірності та статистиці, *коваріація* (англ. *covariance*) – це міра спільної мінливості двох випадкових змінних. *Коефіцієнт кореляції* визначає силу цього лінійного взаємозв’язку та розраховується за формулою

$$Cov_{xy} = \overline{x \cdot y} - \overline{x} \cdot \overline{y}\,.$$

У статистиці показником кореляції між двома змінними є коефіцієнт кореляції Пірсона (позначають r), який набуває значень від (-1) до $(+1)$ включно. Він широко використовується для вимірювання ступеня *лінійної залежності* між двома змінними. Показник був розроблений Карлом Пірсоном (Karl Pearson) та названий на його честь.

Коефіцієнт кореляції Пірсона між двома змінними дорівнює коваріації двох змінних, поділеній на добуток їх стандартних відхилень:

$$r = \frac{Cov_{xy}}{\sqrt{S_x^2 \cdot S_y^2}}.$$

Якщо коефіцієнт кореляції додатній, то досліджувані ознаки характеризуються позитивною кореляцією (табл. 2.2), тобто збільшення однієї ознаки веде до збільшення іншої. Наприклад, при збільшенні росту в середньому збільшується вага.

Якщо коефіцієнт кореляції від'ємний, то існує обернена залежність між показниками, а досліджувані ознаки характеризуються негативною кореляцією (табл. 2.2), тобто при збільшенні одного показника – інший зменшується.

Залежність між імовірністю захворювання дітей на дитячі інфекційні хвороби та їх віком існує обернена залежність: чим старша дитина, тим менша ймовірність захворювання.

Таблиця 2.2 – Тіснота кореляційного зв'язку

Кореляція	Негативна	Позитивна
відсутня	$(-0{,}1) < r \leq 0$	$0 \leq r < 0{,}1$
низька	$(-0{,}3) < r \leq (-0{,}1)$	$0{,}1 \leq r < 0{,}3$
середня	$(-0{,}5) < r \leq (-0{,}3)$	$0{,}3 \leq r < 0{,}5$
висока	$(-1{,}0) \leq r \leq (-0{,}5)$	$0{,}5 \leq r \leq 1{,}0$

Достовірність кореляційного зв'язку безпосередньо пов'язана з кількістю проведених досліджень, тобто з обсягом сукупності *n*. Сильні кореляційні зв'язки можна з високою вірогідністю встановити на малому обсязі експериментального матеріалу. Зате слабкі взаємовпливи в природі можна виявити тільки на основі великого обсягу досліджень.

Регресійна модель (від латинського regressio – рух назад) – це математичний вираз, який пов'язує незалежну змінну x (або кілька змінних $x_1, x_2, ..., x_m$) та одну залежну змінну y.

Регресійний аналіз – розділ математичної статистики, присвячений методам аналізу залежності однієї величини від іншої. Він використовується у тому випадку, коли відношення між змінними можуть бути виражені кількісно у вигляді деякої їх комбінації.

Сукупність методів, за допомогою яких досліджуються та узагальнюються взаємозв'язки кореляційно пов'язаних змінних, називається *кореляційно-регресійним* аналізом, основні якого

1) знаходження залежності між змінними (регресійний аналіз);
2) визначення тісноти зв'язку між змінними (кореляційний аналіз).

Кореляцію і регресію називають простими, якщо досліджується зв'язок між двома ознаками (рис. 2.1) або множинним, коли досліджується залежність між трьома і більшою кількістю ознак.

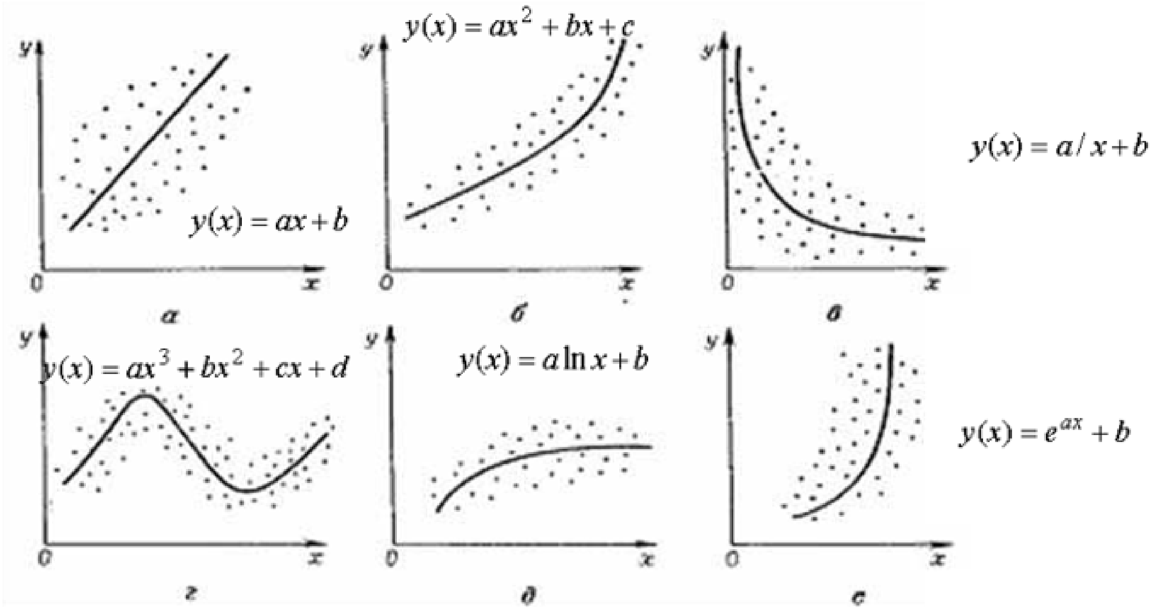


Рисунок 2.1 – Кореляційні поля й гіпотетичні рівняння простої регресії: а) лінійної; б) квадратичної; в) гіперболічної; г) поліноміальної; д) логарифмічної; е) експоненціальної

Основне завдання кореляційно-регресійного аналізу – оцінити параметри моделей з урахуванням особливостей вхідної інформації, перевірити відповідність моделей досліджуваному явищу і спрогнозувати розвиток процесів.

Етапи побудови рівняння регресії (рис. 2.1):

1) Вибір форми рівняння регресії (специфікація моделі).
2) Визначення параметрів обраного рівняння.
3) Аналіз якості рівняння та перевірка адекватності рівняння емпіричним даним, удосконалення рівняння.

Лінійна регресія.

Нехай задано статистичні дані, де кожному значенню $x_i,\ i=\overline{1,n}$, відповідає значення $y_i,\ i=\overline{1,n}$. Припустимо, що залежність між ними є лінійною, тобто $y = ax + b \Leftrightarrow y - ax - b = 0$, де a і b – невідомі параметри.

В аналітичній геометрії параметр a називають кутовим коефіцієнтом, а в біометрії – коефіцієнтом лінійної регресії. Коефіцієнт лінійної регресії a – це число, яке вказує напрям і середню величину зміни залежної ознаки при зміні факторної на одиницю виміру. Коефіцієнт a має знак коефіцієнта кореляції. Чим більший коефіцієнт a, тим більший кут нахилу прямої до додатного напряму осі абсцис.

При обчисленні коефіцієнтів рівнянь можна використати такі способи: графічний, вибраних точок, найменшої помилки, за центральними відхиленнями, за способом Маркова, за коефіцієнтом кореляції, найменших квадратів, за числовими коефіцієнтами (спосіб Труля). Одним із найбільш поширених способів є метод найменших квадратів.

За допомогою методу найменших квадратів розв'язується задача побудови лінійної функції, графік якої не обов'язково проходив би через усі задані точки, але максимально "згладжував" би випадкові похибки вимірювання значень $(x_i, y_i),\ i = \overline{1,n}$. Розглянемо суму квадратів відхилень лінійної функції від значень вимірювання та визначимо її мінімальне значення:

$$G(a,b) = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - ax_i - b \right)^2 \to \min .$$

Запишемо необхідні умови екстремуму функції:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial G}{\partial a} = 2\sum\limits_{i=1}^{n} \left(y_i - (ax_i + b) \right)(-x_i) = 0; \\ \dfrac{\partial G}{\partial b} = 2\sum\limits_{i=1}^{n} \left(y_i - (ax_i + b) \right)(-1) = 0. \end{cases}$$

Отримаємо систему двох лінійних рівнянь з двома невідомими параметрами a та b.

Виконуємо еквівалентні алгебраїчні перетворення:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} \left(y_i - (ax_i + b) \right) x_i = 0; \\ \sum\limits_{i=1}^{n} \left(y_i - (ax_i + b) \right) = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} \left(x_i y_i - ax_i^2 - bx_i \right) = 0; \\ \sum\limits_{i=1}^{n} \left(y_i - ax_i - b \right) = 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i - a\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 - b\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 0; \\ \sum\limits_{i=1}^{n} y_i - a\sum\limits_{i=1}^{n} x_i - bn = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i; \\ a\sum\limits_{i=1}^{n} x_i + bn = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i, \\ a\sum\limits_{i=1}^{n} x_i + bn = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\cdot\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + b\cdot\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i, \\ a\cdot\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i + b = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} y_i, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a\cdot\overline{x^2} + b\cdot\overline{x} = \overline{x\cdot y}, \\ a\cdot\overline{x} + b = \overline{y}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\cdot\overline{x^2} + b\cdot\overline{x} = \overline{x\cdot y}, \\ b = \overline{y} - a\cdot\overline{x}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\cdot\overline{x^2} - a\cdot(\overline{x})^2 = \overline{x\cdot y} - \overline{y}\cdot\overline{x}, \\ b = \overline{y} - a\cdot\overline{x}, \end{cases}$$

Отримали формули для обчислення коефіцієнтів лінії регресії

$$a = \frac{\overline{x \cdot y} - \overline{y} \cdot \overline{x}}{\overline{x^2} - (\overline{x})^2}, \quad b = \overline{y} - a \cdot \overline{x}.$$

Наведемо алгоритм обчислення:

a) середніх значень величин: $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{x \cdot y}$, $\overline{x^2}$, $\overline{y^2}$ та середніх квадратичних відхилень S_x, S_y за формулами:

b)

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, \quad \overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i,$$

$$\overline{x^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2, \quad \overline{y^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i^2,$$

$$\overline{x \cdot y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i,$$

$$S_x = \sqrt{\overline{x^2} - (\overline{x})^2}, \; S_y = \sqrt{\overline{y^2} - (\overline{y})^2} \;,$$

$$Cov_{xy} = \overline{x \cdot y} - \overline{x} \cdot \overline{y};$$

c) вибіркового коефіцієнту кореляції:

$$r = \frac{Cov_{xy}}{S_x \cdot S_y};$$

d) коефіцієнтів *a* і *b*:

$$a = \frac{Cov_{xy}}{S_x^2}, \; b = \overline{y} - a\overline{x};$$

Отже, визначили лінійну регресійну модель: $y = ax + b$.

Якщо необхідно визначити залежність $x = cy + d$, то коефіцієнти c і d знаходимо за формулами:

$$c = r\frac{S_x}{S_y}, \, d = \overline{x} - c\overline{y}.$$

Обидві прямі лінії $y = ax + b$ і $x = cy + d$ проходять через точку $(\overline{x}, \overline{y})$. Для зображення обох прямих ліній на одному графіку друге рівняння варто подати у вигляді: $y = x / c - d / c$.

Завдання. Побудувати лінійну регресійну модель залежності біологічних ознак сосни звичайної. У таблиці 2.1 подані результати вимірювання діаметра сосни (у сантиметрах) $x_i,\ i=\overline{1,n},$ та її висоти (у метрах) $y_i,\ i=\overline{1,n}$. Тут N – номер варіанту, поділений на 4.

Таблиця 2.1 – Результати досліджень біологічних ознак сосни звичайної

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	14,5+N	20,8	19,6+N	23,4-N	21,5-N	25,5	19,4+N	33,7-N	19,4-N	28,6-N
y_i	13,4+N	19,5+N	20,4-N	18,2+N	18,3-N	21,3+N	17,4+N	25,1- N	18,2+N	21,5-N
n	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
x_i	34,2-N	31,1-N	16,6-N	14,9+N	18,4+N	25,8-N	20,5+N	22,7-N	20,3+N	21,2-N
y_i	24,4-N	23,4-N	14,5+N	13,2+N	17,2+N	22,2+N	19,4+N	20,1-N	19,5+N	20,3+N

Кореляційно-регресійний аналіз провести за схемою:

1) Побудувати точковий графік $(x_i, y_i),\ i=\overline{1,n}$.
2) Обчислити середні значення величин: $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{x\cdot y}$, $\overline{x^2}$, $\overline{y^2}$ та значення середніх квадратичних відхилень S_x, S_y.
3) Обчислити коефіцієнти регресії a і *b.*
4) Побудувати в прямокутній системі графік моделей $y=ax+b$ та $y=x/c-d/c$.
5) Обчислити коефіцієнт кореляції r.
6) Зробити висновок про тісноту кореляційного зв'язку.
7) Відповісти на контрольні питання.
8) Зробити загальні висновки.
9) Скласти звіт.

Контрольні питання для самоперевірки

1. Сформулюйте означення коваріації. Наведіть формулу для розрахунку коваріації.
2. Сформулюйте означення кореляції. Наведіть формулу для розрахунку коефіцієнту кореляції.
3. Як пов'язані між собою кореляція та коваріація? Який зв'язок існує між цими статистичними термінами?
4. Що являє собою регресія? Які існують види регресії?
5. Дайте визначення поняттю регресійний аналіз. Назвіть етапи регресійного аналізу.
6. Дайте визначення поняттю лінійна регресія. Наведіть формули, за якими обчислюються коефіцієнти лінійної регресії.
7. Наведіть схему кореляційно-регресійного аналізу.

Типова задача. Виконано статистичне дослідження зросту і ваги студентів групи:

x_i	157	167	173	178	163	166	185	178	164	173	169	165	167	169
y_i	48	52	84	70	51	83	72	68	69	69	63	56	77	78

Побудувати модель лінійної регресії. Побудувати графік лінійної регресії і обчислити коефіцієнт кореляції. Зробити висновок про рівень кореляційного зв'язку цих двох випадкових величин.

Лабораторна робота № 3

Тема роботи: Моделі популяцій, що описуються одним диференційним рівнянням: моделі Мальтуса та Ферхюльста.

Мета роботи: Ознайомитись з побудовою математичних моделей вільного і обмеженого зростання популяцій.

Теоретичні відомості

Розглянемо три моделі зростання популяцій.

1. *Проста математична модель Мальтуса вільного зростання популяцій*

Нехай маємо деякий біологічний вид, для якого існує необмежений запас використовуваних ресурсів. Позначимо чисельність популяції в момент часу t через $N(t)$, тоді вона може бути подана як

$N(t)$ = народжуваність – смертність + міграція. У простішому випадку вважається, що міграція відсутня та припускається, що швидкість зміни населення з часом t пропорційна його поточної чисельності $N(t)$, помноженої на різницю коефіцієнтів народжуваності $\alpha(t) \geq 0$ та смертності $\beta(t) \geq 0$. Отже, маємо рівняння:

$$\frac{dN(t)}{dt} = (\alpha(t) - \beta(t))N(t).$$

Нехай $N(t_0) = N_0$ – чисельність населення в момент $t = t_0$, тобто початкова умова для диференціального рівняння, яке далі інтегруємо

$$\frac{dN(t)}{N(t)} = (\alpha(t) - \beta(t))dt,$$

$$\ln N(t) - \ln N(t_0) = \int_{t_0}^{t} (\alpha(t) - \beta(t))dt,$$

і отримуємо частинний розв'язок, який задовольняє початковій умові:

$$N(t) = N_0 \cdot e^{\int_{t_0}^{t} (\alpha(t) - \beta(t))dt}, \quad t \ge t_0 .$$

Ця математична модель вперше була запропонована у 1798 р. англійським економістом Томасом Мальтусом (Malthus, 1766-1834).

На рис. 3.1 наведені графіки функції $N(t)$ при постійних α і β (різним кривим відповідають різні моменти t_0 початку процесу). При $\alpha = \beta$ чисельність залишається постійною, тобто в цьому випадку розв'язком рівняння є величина $N(t) = N_0$, яка характеризує рівновагу між народжуваністю і смертністю. Вона нестійка в тому сенсі, що навіть невелике порушення рівності $\alpha = \beta$ призводить з часом до все більшого відхилення функції $N(t)$ від значення N_0. При $\alpha < \beta$ чисельність населення зменшується і прямує до нуля при $t \to \infty$, а при $\alpha > \beta$ росте за експоненціальним законом до нескінченності при $t \to \infty$.

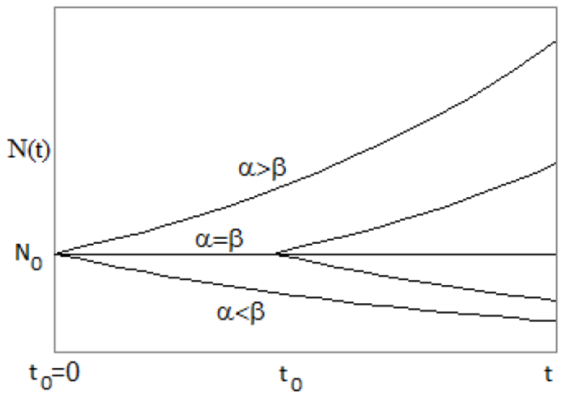


Рисунок 3.1 – Зміна чисельності популяції з часом в моделі Мальтуса

В даному прикладі можна вказати чимало очевидних обмежень застосовності побудованої моделі. Дуже складний процес зміни чисельності населення залежить від свідомого втручання людей, а тому не може бути описаний простими закономірностями. Навіть в ідеальному випадку ізольованої біологічної популяції запропонована модель не відповідає реальності в повній мірі хоча б через обмеженість ресурсів, необхідних для її існування.

2. *Математична модель Мальтуса вільного зростання популяцій з урахування відносного темпу приросту*

Припустимо, що в момент часу $t = t_0$, чисельність деякого біологічного виду становить N_0 одиниць, а $N(t)$ – запас цього виду в момент часу $t \geq t_0$. Тоді похідна $\frac{dN(t)}{dt} = N'(t)$ – це темп приросту, а відношення $N'(t) / N(t) = r$ визначаємо як відносний темп приросту даного біологічного виду.

Далі розглянемо біологічний вид з вільним ростом. У цій моделі припустимо, що відносний темп приросту є величина постійна, яка не залежить від поточної кількості. Тоді $N'(t) / N(t) = r$ є постійною величиною. Отже, маємо диференціальне рівняння, яке є неперервною моделлю зміни чисельності популяції з вільним зростанням з початковими умовами (задача Коші):

$$N'(t) = rN(t),$$
$$N(t_0) = N_0.$$

Аналогічно тому, як це зроблено для першої моделі, отримано, що чисельність популяції і у цьому випадку змінюється за експоненціальним законом

$$N(t) = N_0 \cdot e^{r(t-t_0)}, \; t \geq t_0 .$$

Очевидно, що необмежено довго зростати популяція не може. Якщо $r > 0$, то популяція росте з експоненціальним ростом ($N(t) \to +\infty$ при $t \to +\infty$); якщо $r < 0$, то популяція вимирає ($N(t) \to 0$ при $t \to +\infty$). Величину r, яку ми раніше визначили як відносний темп приросту даного біологічного виду ще називають біологічним потенціалом популяції або мальтузіанським параметром популяції.

Експоненціальний характер зростання чисельності популяції часто проявляється за природних умов у короткочасні періоди, коли є достатньо їжі, немає скупченості та відсутні хижаки-вороги. Учені підрахували, що за сприятливих неконтрольованих умов потомство однієї пари мух через кілька років важило би більше за земну кулю. Крім цього, експоненціальний характер зміни деякої величини спостерігається для багатьох відомих процесів і явищ природи, таких як поглинання світла, мономолекулярні хімічні реакції, радіоактивний розпад речовини, остигання чи нагрів тіла, зростання складних відсотків тощо. Модель Мальтуса використовується в різних наукових дослідженнях з 1700 р. до 1950 р., про що свідчить велика кількість опублікованих статей.

Модель Мальтуса частково була помилковою. Рівняння, справедливе для певного класу популяцій, він вважав універсальним для природи і людей. Мальтус стверджував, що в суспільстві діє закон безмежного зростання населення в геометричній прогресії, а засоби існування збільшуються лише в арифметичній прогресії. Абсолютизація біологічних факторів у відтворенні населення привела до невідповідності математичної моделі та реальності. Як наслідок, Мальтус прогнозував різні катастрофи внаслідок неконтрольованого росту народонаселення. Наприклад, якщо припустити, що ріст народонаселення завжди мав таку ж швидкість, як зараз (подвоєння кількості за 40 років), то, згідно його моделі, отримаємо висновок, що людство існує лише 32 покоління (близько 1300 років). Але в той же час модель Мальтуса може бути застосовна на певних етапах (на обмежених часових інтервалах) до широкого класу динамічних процесів, які, насамперед, спостерігаються у лабораторних умовах: ріст мікробів, дріжджів, бактерій за наявності достатньої кількості поживних ресурсів у середовищі.

Насамкінець, наводимо дискретну модель необмеженого вільного зростання популяцій з урахування відносного темпу приросту

$$\frac{N_{i+1}-N_i}{\Delta t}\approx rN_i,\ i=\overline{t_0,T},$$
$$N_{i+1}\approx N_i(1+r\Delta t),\ N(t_0)=N_0.$$

де N_i – чисельність популяції через i періодів.

3. *Математична логістична модель Ферхюльста обмеженого зростання популяцій з урахування відносного темпу приросту*

У цій моделі припустимо, що відносний темп приросту популяції сповільнюється зі зростанням її кількості, тобто відношення $N'(t)/N(t)$ лінійно зменшується зі збільшенням $N(t)$. Цей факт можна записати у вигляді:

$$\frac{N'(t)}{N(t)}=r-bN(t),$$

де раніше визначена величина r є константою швидкості зростання популяції, $b>0$ – коефіцієнт, пропорційний кількості зустрічей між особинами, що враховує конкуренцію за ресурси харчування особин усередині однієї популяції.

Отже, маємо диференціальне рівняння з початковими умовами (задача Коші):

$$N'(t)=rN(t)\left(1-\frac{N(t)}{K}\right),\qquad N(t_0)=N_0,$$

де величина $K=r/b$ адекватна максимальній чисельності популяції, яка встановлюється з часом, і називається ємністю екологічної ніші або ємністю середовища.

Отримали рівняння Бернуллі. Наведемо його аналітичний розв'язок, який задовольняє початковим умовам

$$N(t) = \frac{K \cdot N_0 \cdot e^{r(t-t_0)}}{K + N_0 \cdot (e^{r(t-t_0)} - 1)}.$$

Ця модель логістичного зростання була запропонована бельгійським математиком П. Ферхюльстом у 1838 р. для опису розвитку популяції в умовах обмежених ресурсів харчування.

Досліджуємо цю модель двома способами, графічним та аналітичним. Ліва частина рівняння – швидкість зміни чисельності деякого біологічного виду, а права частина – квадратична функція, вершина якої визначається координатами $(K/2,\ r \cdot K/4)$.

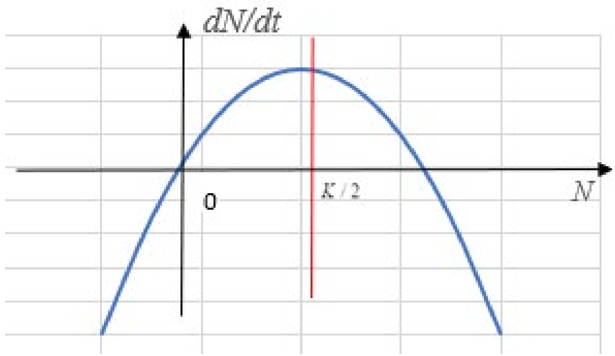


Рисунок 3.2 – Залежність швидкості зміни чисельності

Точки перетину параболи з віссю N, $N_1 = 0$ i $N_2 = K$, є стаціонарними, тому що в них швидкість зростання $\dfrac{dN(t)}{dt} = 0$. В точці $N_1 = 0$ функція $N(t)$ приймає мінімальне значення чисельності популяції (є нестійкою), а в точці $N = K$ досягається максимально можлива чисельність популяції (є стійкою).

Коли чисельність досягає значення $N(t) = K$, швидкість зростання стає максимальною: $\dfrac{dN(t)}{dt} = \dfrac{rK}{4}$. За подальшого збільшення чисельності зростає внутрішньовидова конкуренція, збільшується вплив доданку $\left(-\dfrac{r}{K}N^2(t)\right)$, швидкість зростання починає знижуватися, і чисельність населення прямує до свого стаціонарного значення K. Ця величина відповідає чисельності популяції, за якої її збільшення за рахунок відтворення врівноважується збитком у результаті внутрішньовидової конкуренції.

Дослідимо тепер це ж саме рівняння аналітично. Знайдемо стаціонарні значення чисельності популяції. Коли ліва частина $N'(t)=0$, то права частина

$$rN\left(1-\frac{N}{K}\right)=0,$$

де параметри $r>0, K>0$. Рівняння має два розв'язки: $N_1=0, N_2=K$.

Позначимо праву частину рівняння

$$f(N)=\frac{dN(t)}{dt}=rN\left(1-\frac{N}{K}\right)=rN-\frac{r}{K}N^2,$$

знайдемо похідну $f'(N)=r-2\frac{r}{K}N$ та обчислимо її в точках N_1 та N_2:

$\dfrac{d^2N(t)}{dt^2}=f'(N_1)=f'(0)=r-2\dfrac{r}{K}\cdot 0=r>0$, то точка $N_1=0$ є точкою мінімуму (нестійкою).

$\dfrac{d^2N(t)}{dt^2}=f'(N_2)=f'(K)=r-2\dfrac{r}{K}\cdot K=-r<0$, то точка $N_2=0$ є точкою максимуму (стійкою).

Далі зображені графіки функцій моделей Мальтуса (1) **вільного** зростання популяцій та Ферхюльста (2) **обмеженого** зростання популяцій (обидві з урахуванням відносного темпу приросту) для значень $r=0{,}05;\quad K=40$ і початкових умов: $t_0=0, N_0=5$.

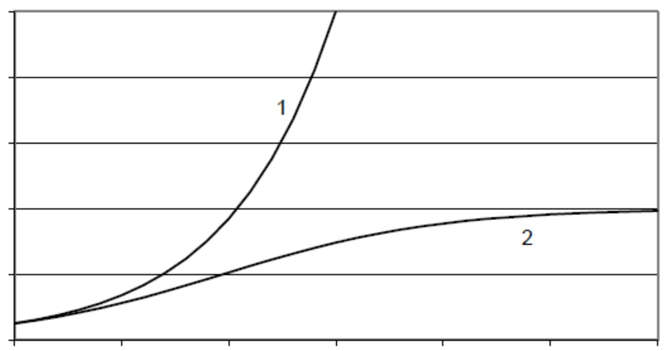


Рисунок 3.3 – Вільне (крива 1) і обмежене (крива 2) зростання популяції

З рис. 3.3 видно, що крива 1 необмежено зростає, а крива 2 зі збільшенням часу наближається до стаціонарного значення $K=40$.

Насамкінець, наводимо дискретну модель логістичного обмеженого зростання популяцій з урахування відносного темпу приросту

$\dfrac{\Delta N}{\Delta t}=rN_i\left(1-\dfrac{N_i}{K}\right)$, де $\Delta N=N_{i+1}-N_i$, $i=\overline{0,T}$, звідки

$$N_{i+1} = N_i \left(1 + r\left(1 - \frac{N_i}{K}\right)\Delta t\right),\ N(t_0) = N_0.$$

Для біологічної та математичної коректності рівняння, вираз $\left(1 + r\left(1 - \frac{N_i}{K}\right)\right)$ замінюється на $e^{r\cdot\left(1-\frac{N_i}{K}\right)}$, остаточно маємо дискретний аналог логістичного рівняння

$$N_{i+1} = N_i e^{r\cdot\left(1-\frac{N_i}{K}\right)\Delta t},\ N(t_0) = N_0.$$

Завдання. У початковий момент часу t_0 кількісний склад деякого біологічного виду становить N_0 одиниць (табл. 3.1). Потрібно зробити прогноз чисельності $N(t)$ даної популяції при $t \geq t_0$ для двох випадків:

– відносний темп приросту популяції дорівнює величині r (вільне зростання популяції).
– відносний темп приросту популяції дорівнює величині $r - bN(t)$ (обмежене зростання популяції).

Таблиця 3.1 – Вихідні дані характеристики популяції

№ варіанту	t_0, год.	N_0	r, год.$^{-1}$,	K
1	0	40	0,19	45
2	8	79	0,23	40
3	2	51	0,20	28
4	6	60	0,13	33
5	7	77	0,15	65
6	5	34	0,18	58
7	10	25	0,09	46
8	3	37	-0,13	60
9	9	84	-0,20	37
10	0	20	-0,16	71
11	8	73	-0,15	25
12	5	61	-0,18	35
13	4	49	-0,22	30
14	10	62	-0,10	50
15	0	55	-0,12	20

Наведемо план виконання роботи:

1) Скласти математичну модель Мальтуса вільного зростання популяції у вигляді лінійного диференціального рівняння та знайти його аналітичний розв’язок.
2) Побудувати три графіка зміни чисельності популяції для різних значень швидкості зростання за однаковим значенням початкової чисельності.
3) Швидкість зростання: $r_1 = r,\ r_2 = 0.5r, r_3 = -r,$
(масштаб осі: $t_{\min} = t_0,\ t_{\max} = t_0 + 10,\ \Delta t = 1$).
4) Скласти математичну модель Ферхюльста обмеженого зростання популяції у вигляді диференціального рівняння Бернуллі, знайти розв’язок рівняння за вказаними початковими умовами.
5) Побудувати графіки зміни чисельності для неперервних та дискретних моделей вільного і обмеженого зростання популяції.
6) Визначити через скільки інтервалів спостереження модель необмеженого зростання перестає бути адекватною (тобто відхилення від моделі обмеженого зростання складає більше 10%).
7) Відповісти на контрольні питання.
8) Зробити загальні висновки.
9) Скласти звіт.

Контрольні питання для самоперевірки

1. Сформулюйте математичну постановку моделі Мальтуса вільного зростання популяцій.
2. Сформулюйте математичну постановку моделі Мальтуса вільного зростання популяцій з урахування відносного темпу приросту.
3. Сформулюйте математичну постановку логістичної моделі Ферхюльста обмеженого зростання популяцій з урахування відносного темпу приросту.
4. Навести дискретні моделі зростання популяцій.

Типова задача

Припустимо, що кількість кролів $N(t)$ (t виражається в місяцях) у заповіднику задовольняє диференціальному рівнянню

$$\frac{dN}{dt} = 0.004N(150 - N).$$

Нехай спочатку в заповіднику нараховується 50 кролів. Що станеться з популяцією кролів, якщо початкова чисельність тварин становитиме 300 особин? Побудувати графіки чисельності для двох випадків.

Лабораторна робота № 4

Тема роботи: Моделі, що описуються системами двох диференційних рівнянь. Модель Лотки. Дослідження моделі Вольтерри «хижак-жертва».

Мета роботи: вивчити нелінійні моделі Лотки-Вольтерри, набути навички дослідження моделей, навчитись будувати фазовий портрет систем диференціальних рівнянь другого порядку в залежності від параметрів моделі.

Теоретичні відомості

У загальному вигляді моделі, що описуються системами двох диференціальних рівнянь, можна записати як

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = P(x,y), \\ \dfrac{dy}{dt} = Q(x,y). \end{cases}$$

Дослідження нелінійних систем другого порядку виконати за планом:

1. Знаходимо стаціонарні стани $(\overline{x}_1,\overline{y}_1),(\overline{x}_2,\overline{y}_2),...,(\overline{x}_n,\overline{y}_n)$ системи двох диференціальних рівнянь, прирівнюючи похідні та, як наслідок, праві частини рівнянь до нуля:
$$\begin{cases} P(x,y) = 0, \\ Q(x,y) = 0. \end{cases}$$
2. Лінеарізуємо рівняння поблизу кожного стаціонарного стану з номером i, де $i = \overline{1,n},$, знаходимо коефіцієнти лінеаризації:
$$a = \frac{\partial P(\overline{x}_i,\overline{y}_i)}{\partial x},\ b = \frac{\partial P(\overline{x}_i,\overline{y}_i)}{\partial y},$$
$$c = \frac{\partial Q(\overline{x}_i,\overline{y}_i)}{\partial x},\ d = \frac{\partial Q(\overline{x}_i,\overline{y}_i)}{\partial y}.$$
Поведінка розв'язків лінеаризованої системи
$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax + by, \\ \dfrac{dy}{dt} = cx + dy \end{cases}$$

в околі нульової точки буде повністю збігатися з поведінкою розв'язків в околі стаціонарного стану нелінійної системи, за деякими винятками.

3. Записуємо характеристичне рівняння:
$$\begin{vmatrix} (a-\lambda) & b \\ c & (d-\lambda) \end{vmatrix} = 0 \text{ або } \lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - bc) = 0\,.$$

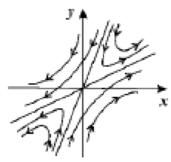
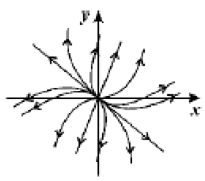
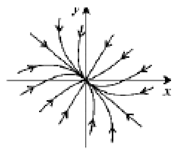
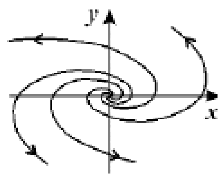
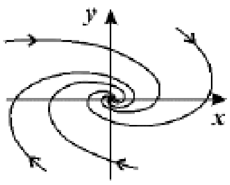
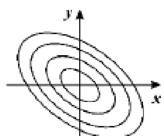
4. Знаходимо корені характеристичного рівняння

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\left((a+d) \pm \sqrt{(a+d)^2 - 4(ad-bc)}\right)$$

та позначаємо $\sigma=(a+d)$, $\Delta = ad - bc$.

5. Визначаємо тип фазового портрету та будуємо його в околі кожного стаціонарного стану (табл. 4.1).

Таблиця 4.1 – Класифікація стаціонарних станів системи

№	Тип особливої точки	Область на площині	Фазовий портрет	Тип траєкторій
1	Сідло. λ_1 та λ_2 – дійсні, $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$	$\Delta < 0$		Гіперболи
2	Нестійкий вузол. λ_1 та λ_2 – дійсні, $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0.$	$\begin{cases}\Delta > 0,\\ \sigma>0,\\ \sigma^2 - 4\Delta > 0.\end{cases}$		Параболи
3	Стійкий вузол. λ_1 та λ_2 – дійсні, $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0.$	$\begin{cases}\Delta > 0,\\ \sigma < 0,\\ \sigma^2 - 4\Delta > 0.\end{cases}$		Параболи
4	Нестійкий фокус. λ_1 та λ_2 – комплексні, $\mathrm{Re}\lambda_1 > 0,$ $\mathrm{Re}\lambda_2 > 0.$	$\begin{cases}\Delta > 0,\\ \sigma>0,\\ \sigma^2 - 4\Delta < 0.\end{cases}$		Спіралі
5	Стійкий фокус. λ_1 та λ_2 – комплексні, $\mathrm{Re}\lambda_1 < 0,$ $\mathrm{Re}\lambda_2 < 0.$	$\begin{cases}\Delta > 0,\\ \sigma<0,\\ \sigma^2 - 4\Delta < 0.\end{cases}$		Спіралі
6	Центр λ_1 та λ_2 – комплексні, $\mathrm{Re}\lambda_1 = \mathrm{Re}\lambda_2 = 0.$	$\begin{cases}\Delta > 0,\\ \sigma=0.\end{cases}$		Концентричні еліпси

Модель Лотки

Нехай у деякому об'ємі знаходиться у надлишку речовина A. Молекули A з деякою постійною швидкістю k_0 перетворюються в молекули речовини X (реакція нульового порядку) (рис. 4.1).

$$\longrightarrow A \xrightarrow{k_0} X \xrightarrow{k_1} \overleftarrow{Y} \xrightarrow{k_2} B$$

Рисунок 4.1 – Схема хімічної реакції у моделі Лотки

Речовина X може перетворюватись у речовину Y з константою швидкості k_1, до того ж швидкість реакції тим більша, чим більша концентрація речовини Y (реакція другого порядку). На рис. 4.1 це зображено зворотною стрілкою над символом Y. Молекули Y, у свою чергу, незворотно розпадаються з константою k_2, в результаті чого утворюється речовина B.

Для незалежних змінних $x(t)$ та $y(t)$ (концентрації хімічних компонентів) маємо систему рівнянь, що описують реакцію, подану на рис. 4.1:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = k_0 - k_1 xy, \\ \dfrac{dy}{dt} = k_1 xy - k_2 y. \end{cases} \tag{4.1}$$

Завдання1. Потрібно дослідити модель Лотки за такими наборами параметрів (номер варіанту за списком групи позначено через N):

1. $k_0 = 3 + 0{,}1 \cdot N$, $k_1 = k_2 = 2 + 0{,}2 \cdot N$;
2. $k_0 = 3 + 0{,}1 \cdot N$, $k_1 = 2 + 0{,}2 \cdot N$, $k_2 = 1 + 0{,}3 \cdot N$.

Наведемо план виконання роботи:

1) Скласти математичну модель для кожного набору параметрів.
2) Знайти стаціонарні стани кожної системи.
3) Визначити типи стаціонарних станів.
4) Для кожного з даних наборів параметрів побудувати фазові портрети.
5) Відповісти на контрольні питання.
6) Зробити висновки.
7) Скласти звіт.

Модель Вольтерри

Розглянемо модель «хижак-жертва», яка вперше була запропонована В. Вольтеррою для пояснення періодичних змін числа особин.

Нехай у деякому обмеженому ареалі живуть хижаки і жертви, наприклад зайці та вовки. Зайці харчуються рослинною їжею, яка є завжди в достатній кількості. Вовки можуть харчуватися лише зайцями.

Позначимо число зайців (жертв) як $x(t)$, а число вовків (хижаків) як $y(t)$. Оскільки кількість їжі у зайців необмежена, ми можемо припустити, що вони розмножуються зі швидкістю, пропорційною їх числу – $\varepsilon_x x$. Якщо народжуваність зайців перевищує смертність, то $\varepsilon_x > 0$.

Нехай спад зайців пропорційний ймовірності зустрічі зайця з вовком, тобто пропорційна добутку xy з коефіцієнтом пропорційності γ_{xy}. Можна припустити, що кількість вовків зростає тим швидше, чим частіше відбуваються їхні зустрічі із зайцями, а саме пропорційно xy з коефіцієнтом пропорційності γ_{yx}.

Крім того, має місце процес природної смертності вовків, причому швидкість смертності пропорційна їх кількості, коефіцієнт пропорційності: ε_y.

Ці міркування призводять до формулювання класичної вольтерівської системи рівнянь, що описує зміни чисельності жертв *x* та хижаків *y*:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = (\varepsilon_x x - \gamma_{xy} \cdot yx), \\ \dfrac{dy}{dt} = -y(\varepsilon_y - \gamma_{yx} x). \end{cases} \tag{4.2}$$

$$x(0) = x_0, \;\; y(0) = y_0. \tag{4.3}$$

де ε_x, ε_y, γ_{xy}, γ_{yx} – невід'ємні константи, (4.3) – початкові умови.

Побудуємо різницеву схему моделі (4.2) –(4.3).

$$\begin{cases} x^{i+1} = x^i + dt \cdot x^i \cdot (\varepsilon_x - \gamma_{xy} y^i), \\ y^{i+1} = y^i - dt \cdot y^i \cdot (\varepsilon_y - \gamma_{yx} x^i). \\ x^0 = x_0, \; y^0 = y_0. \end{cases} \tag{4.4}$$

Завдання 2. Потрібно дослідити модель Вольтерри (4.4) за наборами параметрів, наведеними у табл. 4.2, згідно з номером варіанту за списком групи.

Наведемо план виконання роботи:

1) Скласти математичну модель задачі.
2) Знайти стаціонарний стан системи для випадку $x(t) > 0, \; y(t) > 0$.
3) Визначити тип стаціонарного стану.
4) Побудувати фазовий портрет та графіки розв'язку системи.
5) Знайти розв'язки систем диференціальних рівнянь.
6) Провести аналіз результатів.
7) Відповісти на контрольні питання.
8) Зробити загальні висновки.
9) Скласти звіт.

Таблиця 4.2 – Параметри моделі Вольтерри

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
ε_x	2	1	2	3	1	2	3	3	2	4	2	4	4	1	3
ε_y	2	2	4	2	1	2	2	1	1	4	1	1	2	1	3
γ_{xy}	4	1	4	3	3	2	1	1	2	2	2	2	1	3	2
γ_{yx}	4	2	2	1	2	3	3	3	1	2	1	2	1	3	2

Контрольні питання для самоперевірки

1. Сформулюйте математичну постановку моделі Вольтерри.

2. Наведіть різницеві схеми моделей Лотки та Вольтерри.

3. Скільки стаціонарних станів має модель Вольтерри? Яка їх стійкість?

Типові задачі

1. Модель вибору одного з рівноправних видів може описуватися системою рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax - xy, \\ \dfrac{dy}{dt} = ay - xy, \end{cases}$$

де $a = 1{,}5$ – коефіцієнт розмноження кожного з видів.

Знайдіть координати особливих точок. Визначте тип кожного із знайдених стаціонарних станів. Побудуйте фазовий портрет системи.

2. Модель конкуренції рівноправних видів у безрозмірних змінних може бути описана системою рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x(1 - by - x), \\ \dfrac{dy}{dt} = y(1 - bx - y). \end{cases}$$

Тут коефіцієнт b показує, у скільки разів відрізняються швидкості міжвидової та внутрішньовидової конкуренції. Знайдіть координати особливих точок. Побудуйте фазові портрети системи для $b = 2$ (міжвидова конкуренція в 2 рази перевищує внутрішньовидову) та для $b = 0{,}5$ (внутрішньовидова конкуренція в 2 рази перевищує міжвидову).

Лабораторна робота № 5

Тема роботи: Лінійні оптимізаційні моделі.

Мета роботи: Побудова математичної моделі складання сумішей (раціону) та її реалізація з використанням табличного процесору Excel та графічного застосунку. Ознайомлення з методами розв'язання задач лінійного програмування.

Теоретичні відомості

Лінійні оптимізаційні моделі – це математичні моделі, що використовуються для вирішення проблем оптимізації з обмеженнями, де функції мети та обмеження є лінійними. Такі моделі використовуються для вирішення проблем з максимізації або мінімізації функції мети з урахуванням обмежень на значення змінних. У лінійних оптимізаційних моделях функція мети та обмеження виражаються за допомогою лінійних функцій, які представляються у вигляді суми добутків змінних та їх коефіцієнтів.

Основні складові лінійних оптимізаційних моделей:

- Функція мети – це функція, яку треба мінімізувати або максимізувати, вона складається зі змінних та їх коефіцієнтів.
- Обмеження – це система лінійних рівнянь або нерівностей, які накладаються на значення змінних.
- Змінні – це невідомі величини, які можуть мати обмеження на свої значення або бути вільними.

Приклади задач, які можуть бути розв'язані з використанням лінійних оптимізаційних моделей, включають планування виробництва, розподіл ресурсів, оптимальне розташування, маркетингову стратегію та багато іншого.

Для розв'язання лінійних оптимізаційних моделей використовуються різноманітні методи, такі як симплекс-метод, градієнтного спуску та інші. Узагальнені лінійні оптимізаційні моделі (наприклад, цілочисельне програмування), враховують додаткові обмеження на значення змінних і можуть мати дискретний набір розв'язків.

Розглянемо з***адачу про «дієту»*** (або про суміш): деякий раціон складається з кількох видів продуктів. Відомі вартість одиниці кожного компонента, кількість необхідних організму поживних речовин та потреб у речовині, вміст в одиниці продукту поживної речовини. Необхідно знайти оптимальний раціон – кількість кожного виду продукту, що враховує вимоги забезпечення організму необхідною кількістю поживних речовин.

Критерій оптимальності – мінімальна вартість раціону.

Математична постановка задачі про «дієту»: нехай раціон складається з n видів продуктів. Відомі вартість одиниці кожного продукту – $c_j \left(j = \overline{1, n}\right)$

речовині – b_i $\left(i=\overline{1,m}\right)$. В одиниці j-го продукту міститься a_{ij} $\left(i=\overline{1,m}; j=\overline{1,n}\right)$ поживної речовини i. Необхідно знайти оптимальний раціон $X=(x_1,x_2,...,x_n)$, що враховує вимоги забезпечення організму необхідною кількістю поживних речовин.

Позначимо через x_1, x_2, …, x_n – кількість відповідного j-го виду продукту $\left(j=\overline{1,n}\right)$. Система обмежень описуватиме забезпечення в раціоні кожної поживної речовини не нижче зазначеного рівня b_i $\left(i=\overline{1,m}\right)$. Математична модель матиме вигляд:

$$F=c_1x_1+c_2x_2+...+c_nx_n\to\min,$$

за умов

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+...+a_{1n}x_n\ge b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+...+a_{2n}x_n\ge b_2, \\ ... \\ a_{k1}x_1+a_{k2}x_2+...+a_{kn}x_n\ge b_k, \\ x_i\ge 0,\ i=\overline{1,n}. \end{cases}$$

Маємо задачу лінійного програмування.

У програмному забезпеченні Microsoft Excel передбачено спеціальний інструмент для розв’язання оптимізаційних задач – Розв’язувач, що запускається за допомогою «Дані» → «Розв’язувач». Цей засіб шукає розв’язок оптимізаційної задачі за ітеративним алгоритмом, багаторазово змінюючи значення змінних і, таким чином, наближуючи цільову функцію до оптимального значення.

ПРИМІТКА. Якщо вкладка «Дані» не містить команди «Розв’язувач», то необхідно перейти на вкладку «Файл» → «Параметри» → «Надбудови» та встановити в діалоговому вікні прапорець «Пошук розв’язання».

Після виконання команди «Дані» → «Розв’язувач» відкриється діалогове вікно «Параметри розв’язувача» (рис. 5.1). Розглянемо призначення його основних елементів.

У полі «Оптимізувати цільову функцію:» вказують адресу цільової клітинки (ця клітинка повинна містити формулу цільової функції).

За допомогою перемикача «До:» вказують, що потрібно зробити з цільовою функцією: максимізувати, мінімізувати або отримати задане значення.

У полі «Змінюючи клітинки змінних:» вказують адреси клітинок, де містяться аргументи цільової функції.

Область «Підлягає обмеженням:» призначена для відображення списку граничних умов поставленої задачі.

Кнопка «Додати» призначена для створення обмежень.

Кнопку «Змінити» використовують для редагування наявних обмежень.

Кнопка «Видалити» призначена для скасування виділеного обмеження.

Кнопку «Параметри» використовують для завантаження або збереження оптимізаційної моделі, визначення граничного часу роботи засобу та настроювання інших параметрів.

За допомогою кнопки «Розв’язати» запускають процес пошуку розв’язку.

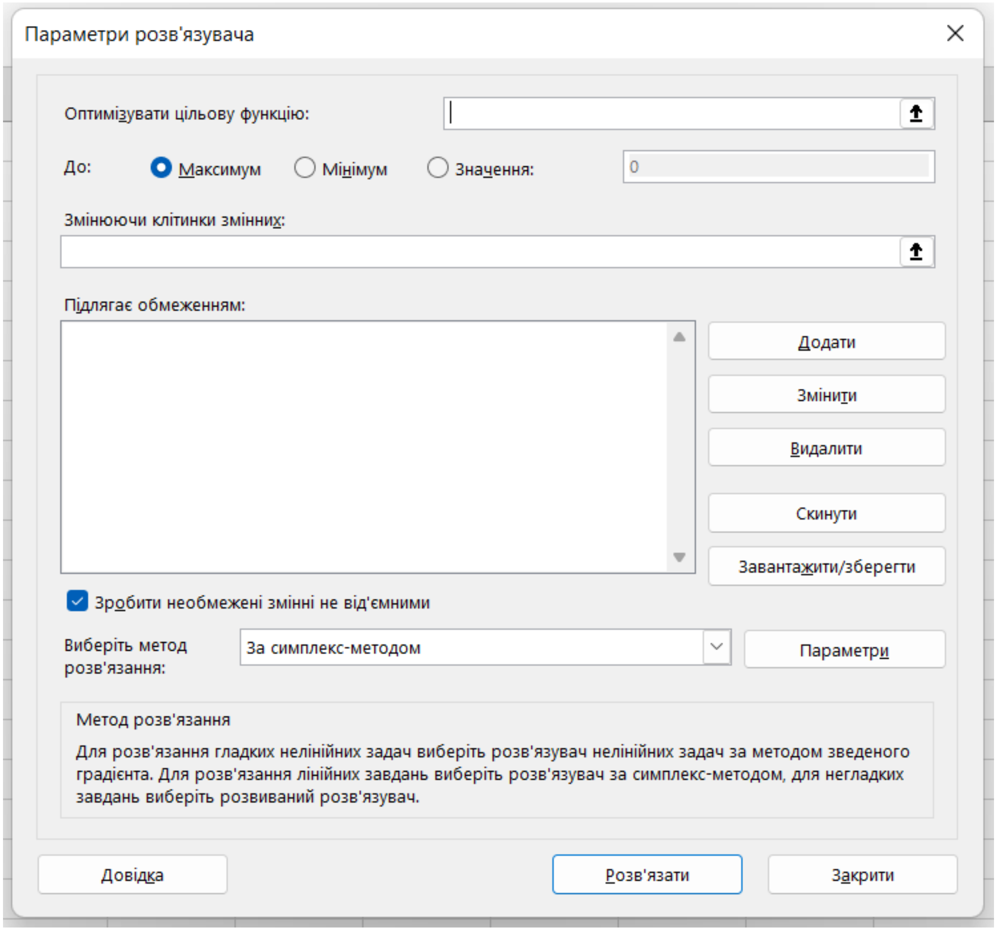


Рисунок 5.1 – Вікно команди "Розв’язувач"

Кнопка «Закрити» призначена для виходу з вікна без пошуку розв’язку.

У вікні «Параметри розв‘язувача» потрібно ввести дані про змінні, цільову функцію та обмеження і клацнути кнопку «Розв’язати».

Перед використанням інструменту «Розв’язувач» математичну модель необхідно подати у вигляді електронної таблиці. Перелічимо дії, які потрібно виконати.

Визначити, у яких клітинках зберігатимуться значення змінних.

Ввести формулу обчислення цільової функції у цільову клітинку.

Ввести обмеження достатньо у відповідні клітинки формул лівих частин обмеження, а в інші клітинки – числа. Зазначимо, що прямі обмеження в ЗЛП

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots, \; x_n \geq 0$$

не потрібно вводити в електронну таблицю; їх можна задати безпосередньо у вікні «Зробити необмежені змінні не від’ємними».

Коли інструмент Розв’язувач завершить роботу, буде відображено вікно «Результати пошуку розв’язку». Якщо просто клацнути кнопку ОК, на аркуші моделі буде відображено оптимальне значення цільової функції та значення змінних, при яких воно досягається. Якщо перед тим вибрати перемикач «Відновити вихідні значення», то вони залишаться такими ж, як і до пошуку розв’язку, а якщо вибрати елемент «Результати» у списку «Тип звіту», то буде створено аркуш з детальним аналізом розв’язання задачі.

Графічний метод розв’язування задач лінійного програмування

Для розв’язування двовимірних задач лінійного програмування, тобто задач із двома змінними, а також деяких тривимірних застосовують графічний метод, що ґрунтується на геометричній інтерпретації та аналітичних властивостях задач лінійного програмування.

Розглянемо задачу. Знайти

$$Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 \to \max(\min)$$

за умов:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \{\le, =, \ge\} b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \{\le, =, \ge\} b_2; \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 \{\le, =, \ge\} b_3; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \{\le, =, \ge\} b_m. \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

Алгоритм графічного методу розв’язування задачі лінійного програмування складається з таких кроків:

1. Будуємо прямі, рівняння яких дістаємо заміною в обмеженнях задачі знаків нерівностей на знаки рівностей.

2. Визначаємо півплощини, що відповідають кожному обмеженню задачі.

3. Знаходимо багатокутник розв’язків задачі лінійного програмування.

4. Будуємо вектор $\overrightarrow{N} = (c_1; c_2)$, що задає напрям зростання значення цільової функції задачі.

5. Будуємо пряму $c_1x_1 + c_2x_2 = \mathrm{const}$, перпендикулярну до вектора $\overrightarrow{N}$.

6. Рухаємо пряму $c_1x_1 + c_2x_2 = \mathrm{const}$ в напрямку вектора $\vec{N}$ (для задачі максимізації) або в протилежному напрямі (для задачі мінімізації), знаходимо вершину багатокутника розв’язків, де цільова функція набирає екстремального значення.

7. Визначаємо координати точки, в якій цільова функція набирає максимального (мінімального) значення, і обчислюємо екстремальне значення цільової функції в цій точці.

Приклади розв'язування задач графічним методом

Приклад 1. Підприємство спеціалізується на виробництві добрив фітозахисного призначення, зокрема, воно випускає два мікробіологічних препарати – А та В, кожен з яких проходить два етапи виробництва: промислове культивування мікроорганізмів та застосування оптимальних технологій отримання кінцевого продукту. Тривалість кожного етапу для обох видів препаратів А і В подана в табл. (5.1).

Таблиця 5.1 – Тривалість обробки мікробіологічних препаратів

Етапи виробництва	Тривалість обробки продукту, хв		Ресурс робочого часу, год. на тиждень
	А	В	
Промислове культивування мікроорганізмів	30	15	40
Застосування оптимальних технологій отримання кінцевого продукту	12	26	36

Прибуток підприємства від реалізації одиниці препарату А дорівнює 50 у.о., а препарату В – 30 у.о.

Вивчення ринку збуту показало, що тижневий попит на А ніколи не перевищує попиту на В більш, як на 30 одиниць, а продаж препарату В не перевищує 80 одиниць на тиждень.

Необхідно визначити обсяги виробництва цих мікробіологічних препаратів, які забезпечують максимальний прибуток фірми. Для цього слід побудувати економіко-математичну модель поставленої задачі та розв'язати її графічно.

Побудова математичної моделі. Змінними в моделі є тижневі обсяги виробництва препаратів А та В.

Нехай

x_1 – кількість препаратів А, а

x_2 – кількість препаратів В, виготовлених за тиждень.

Цільова функція задачі — максимум прибутку фірми від реалізації продукції. Математично вона подається так:

$$Z = 50x_1 + 30x_2 \to \max .$$

Обмеження на тривалість роботи протягом двох етапів мають вид:
для першого етапу:

$$30x_1 + 15x_2 \leq 2400 \text{ (хв)};$$

для другого етапу:

$$12x_1 + 26x_2 \leq 2160 \text{ (хв)}.$$

Обмеження на попит записуються так:

$$x_1 - x_2 \leq 30 \text{ та } x_2 \leq 80.$$

Остаточно математичну модель задачі визначаємо так:

$$Z = 50x_1 + 30x_2 \to \max$$

за умов:

$$\begin{cases} 30x_1 + 15x_2 \leq 2400; \\ 12x_1 + 26x_2 \leq 2160; \\ x_1 - x_2 \leq 30; \\ x_2 \leq 80. \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0.$$

Розв'язання. Перший крок полягає в геометричному зображенні допустимих планів задачі, тобто у визначенні такої області, де водночас виконуються всі обмеження моделі. Замінимо знаки нерівностей на знаки строгих рівностей і побудуємо графіки відповідних прямих (рис. 5.2). Кожна з побудованих прямих поділяє площину системи координат на дві напівплощини. Координати точок однієї з напівплощин задовольняють задану нерівність, а іншої – ні. Щоб визначити необхідну напівплощину (на рис. її напрям позначено стрілкою), потрібно взяти будь-яку точку і перевірити, чи задовольняють її координати зазначене обмеження. Якщо задовольняють, то напівплощина, в якій міститься вибрана точка, є геометричним зображенням нерівності. Інакше таким зображенням є інша напівплощина.

Умова невід'ємності змінних ($x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$) обмежує область допустимих планів задачі першим квадрантом системи координат. Переріз усіх напівплощин визначає область допустимих планів задачі – шестикутник *OABCDE*. Координати будь-якої його точки задовольняють систему обмежень задачі та умову невід'ємності змінних. Тому поставлену задачу буде розв'язано, якщо ми зможемо відшукати таку точку багатокутника *OABCDE*, в якій цільова функція Z набирає найбільшого значення.

Побудуємо вектор $\overrightarrow{ON} = (c_1; c_2)$, координатами якого є коефіцієнти при змінних у цільовій функції задачі. У нашій задачі вектор $\overrightarrow{ON} = (50; 30)$. Він задає напрям збільшення значень цільової функції *Z*, а вектор, протилежний йому, – напрям їх зменшення.

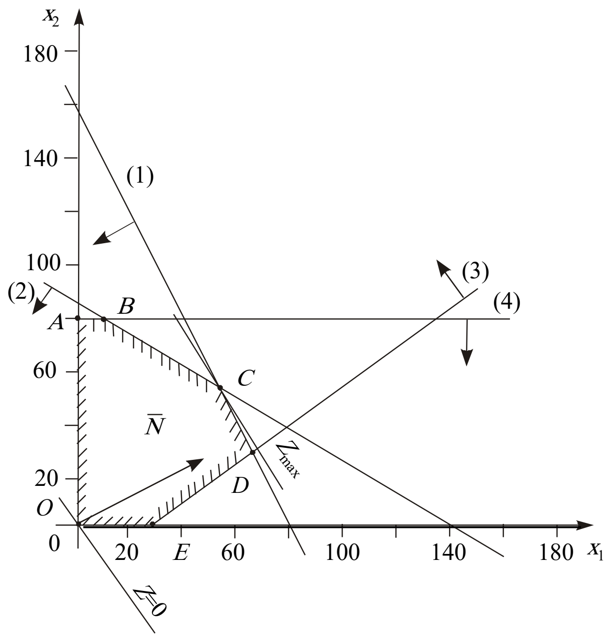


Рисунок 5.2 – Графічна інтерпретація задачі

Побудуємо лінію, що відповідає, наприклад, значенню $Z = 0$. Це буде пряма $50x_1 + 30x_2 = 0$, яка перпендикулярна до вектора $\vec{N}$ і проходить через початок координат. Оскільки в даному прикладі необхідно визначити найбільше значення цільової функції, то рухаємо пряму $50x_1 + 30x_2 = 0$ паралельно згідно з напрямом вектора $\vec{N}$ доти, доки не зустрінемо вершину багатокутника, яка і буде відповідати оптимальному плану задачі.

Із рис. 5.2 видно, що останньою спільною точкою прямої цільової функції та багатокутника *OABCDE* є точка *C*. Координати цієї точки є оптимальним планом задачі, який визначає обсяги виробництва для забезпечення максимального прибутку від їх реалізації.

Координати точки *C* є розв'язком системи рівнянь:

$$\begin{cases} 30x_1 + 15x_2 = 2400; \\ 12x_1 + 26x_2 = 2160, \end{cases}$$

звідси маємо: $x_1 = 50$; $x_2 = 60$.

Отже, $X^* = (50; 60)$; $\max Z = 50 \cdot 50 + 30 \cdot 60 = 4300$.

Це означає, що коли фірма щотижня виготовлятиме 50 препаратів виду А та 60 – виду В, то вона отримає максимальний прибуток – 4300 у. о. Це потребуватиме повного використання тижневих ресурсів робочого часу верстатів 1 та 2.

Приклад 2. Для невеликої птахоферми потрібно розрахувати оптимальний кормовий раціон на 1000 курчат, яких вирощують з 4-х до 8-тижневого віку.

Нехтуючи тим, що потижневі витрати кормів для курчат залежать від їхнього віку, вважатимемо, що за 4 тижні курча споживає не менше 500 г суміші. Крім цього, кормовий раціон курчат має задовольняти певні вимоги щодо поживності. Сформулюємо ці вимоги у спрощеному вигляді, беручи до уваги лише дві поживні речовини: білок і клітковину, що містяться у кормах двох видів – зерні та соєвих бобах.

Вміст поживних речовин у кожному кормі та їх вартість маємо у табл. 5.2.

Таблиця 5.2 – Поживність та вартість кормів

Корм	Вміст поживних речовин в 1 кг корму, %		Вартість 1 кг корму, у. о.
	білку	клітковини	
Зерно	10	2	0,40
Соєві боби	50	8	0,90

Готова кормова суміш має містити не менше як 20 % білка і не більш як 5 % клітковини. Визначити масу кожного з двох видів кормів, що утворюють кормову суміш мінімальної вартості, водночас задовольняючи вимоги до загальної маси кормової суміші та її поживності.

Побудова математичної моделі. Нехай x_1 – маса зерна, а x_2 – соєвих бобів (в кг) у готовій кормовій суміші.

Загальна кількість суміші $x_1 + x_2$ має становити понад 500 кг, тобто

$$x_1 + x_2 \geq 500.$$

Розглянемо обмеження щодо поживності кормової суміші.

Суміш має містити не менш як 20 % білка:

$$10x_1 + 50x_2 \geq 20\ (x_1 + x_2),$$

а також не більше як 5 % клітковини:

$$2x_1 + 8x_2 \leq 5\ (x_1 + x_2).$$

Загалом математична модель задачі оптимізації кормового раціону має такий вигляд:

$$Z = 0{,}40x_1 + 0{,}90x_2 \to \min$$

за умов:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 500; & (1) \\ -10x_1 + 30x_2 \geq 0; & (2) \\ -3x_1 + 3x_2 \leq 0. & (3) \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0. \qquad (4)$$

Маємо задачу лінійного програмування, яка містить лише дві змінні, а тому може бути розв’язана графічно.

Розв'язання. Інтерпретацію задачі подано на рис. 5.3.

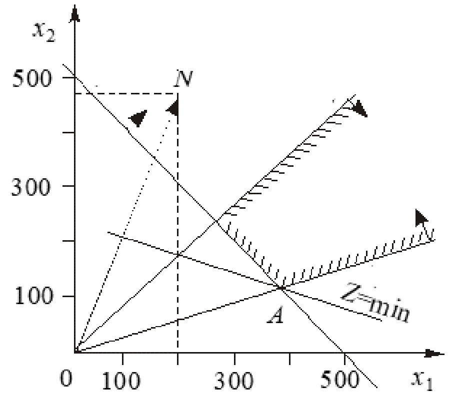


Рисунок 5.3 – Графічна інтерпретація задачі

Множина допустимих її розв'язкі необмежена. Для вектора $\overrightarrow{ON} = (0{,}4;\ 0{,}9)$ можна змінити масштаб, наприклад, $\overrightarrow{ON} = (200;\ 450)$. Найменшого значення цільова функція Z досягає в точці A, що лежить на перетині граничних прямих, які відповідають обмеженням (1) та (2). Визначимо її координати:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 500; \\ -10x_1 + 30x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 375; \\ x_2 = 125. \end{cases}$$

Отже, $X^* = (375;\ 125)$; $\min Z = 0{,}4 \cdot 375 + 0{,}9 \cdot 125 = 262{,}5$.

Завдання. До добового раціону сім'ї входять два продукти: м'ясо і фрукти. Щодо кожного з продуктів відомо: скільки в одному кілограмі міститься білка, вітаміну A, вітаміну B, вітаміну C та вартість одного кілограму м'яса та фруктів. Обчислити загальну вагу продуктів у раціоні мінімальної вартості за умов, що у сукупності всі продукти повинні містити не менше заданої кількості компонентів (білка, вітаміну A, вітаміну B, вітаміну C). Позначення вихідних початкових даних задачі наведені в табл. 5.2.

Необхідно знайти оптимальний план задачі.

Таблиця 5.2 – Початкові дані задачі добового раціону

Вид компонента	Вага компонента (у.о.) в одному кг продукту		Потрібна вага компонента в раціоні, у.о.
	Продукт №1	Продукт №2	
Білок	a_{11}	a_{12}	b_1
Вітамін *A*	a_{21}	a_{22}	b_2
Вітамін *B*	a_{31}	a_{32}	b_3
Вітамін C	a_{41}	a_{42}	b_4
Ціна 1 кг продукту, грн./кг	c_1	c_2	

Задачу розв’язати за набором параметрів, поданими у табл. 5.3, які треба обирати відповідно до порядкового номера в списку групи.

Наведемо план виконання роботи:

1) Записати завдання у відповідності з даними табл. 5.3.
2) Сформулювати математичну постановку задачі.
3) Застосувати симплекс-метод за допомогою програмного забезпечення Microsoft Excel.
4) Розв’язати задачу графічним методом за допомогою графічного калькулятора Desmos або GeoGebra.
5) Порівняти результати розрахунків.
6) Відповісти на контрольні питання.
7) Зробити висновки.
8) Скласти звіт.

Таблиця 5.3 – Параметри оптимізаційної моделі

№	a_{11}	a_{12}	b_1	a_{21}	a_{22}	b_2	a_{31}	a_{32}	b_3	a_{41}	a_{42}	b_4	c_1	c_2
1	17	0,9	10	0,09	12	4	4,1	0	1	0	7,1	1	45	19
2	15	0,9	10	0,07	12	4	4,1	0	2	0	7,2	1	55	15
3	11	0,8	10	0,05	11	4	2,1	1	1	2	7,1	1	37	15
4	18	0,8	10	0,07	11	4	4,3	0	1	0	7,6	1	39	17
5	17	0,9	12	0,07	11	4	4,1	0	1	1,2	7,7	3	30	21
6	18	0,8	10	0,07	11	4	4,3	0	1	0	7,6	1	39	17
7	17	0,9	10	0,09	12	4	4,1	0	1	0	7,1	2	46	16
8	21	0,9	10	0,1	14	4	5,1	0,05	1	0,01	7,1	2	42	22
9	11	0,9	10	0,07	10	4	4,2	0,02	1	0	7,3	2	12	32
10	16	0,8	10	0,05	11	4	3,9	0,08	1	1	7,3	3	15	42
11	13	0,9	10	0,07	12	4	4,2	0,09	1	0	7,7	1	12	31
12	18	0,8	10	0,09	10	4	3,8	0	1	0	7,5	2	34	25
13	13	0,9	10	0,08	11	4	3,9	0	1	1	7,3	3	21	21
14	15	0,8	10	0,08	12	4	3,3	0	1	0	7,5	3	42	37
15	16	0,9	10	0,07	10	4	4,2	1	1	1	7,7	1	38	11

Контрольні питання для самоперевірки

1. Дайте означення математичної моделі. Які ви знаєте основні їх типи?
2. Наведіть математичну постановку задачі лінійного програмування.
3. Опишіть алгоритм графічного методу розв’язання задачі лінійного програмування. За яких умов можна застосувати цей метод?
4. Для складних проблем у бізнесі не існує оптимальних рішень. Однак оптимізаційні моделі дають оптимальні розв’язки. У якому сенсі ці розв’язки оптимальні?

5. Наявність системи обмежень звужує діапазон значень, які можуть приймати керовані змінні та, відповідно, цільова функція. Поясніть це твердження.

Типові задачі

1. Кондитерська фабрика для виробництва трьох видів карамелі A, B і C використовує три види основної сировини: цукор, патоку та фруктове пюре. Норми витрат сировини кожного виду на виробництво 1 т карамелі A, B і C, прибуток від реалізації 1 т карамелі кожного виду, а також загальна кількість сировини кожного виду, яка може бути використана фабрикою, наведені в таблиці.

Таблиця – Вихідні дані задачі

Вид сировини	Норми витрат сировини (т) на 1 т карамелі			Загальна кількість сировини (т)
	A	B	C	
Цукор	0,8	0,5	0,6	800
Патока	0,4	0,4	0,3	600
Фруктове пюре	–	0,1	0,1	120
Прибуток від реалізації 1 т продукції (грн)	108	112	126	–

Визначити план виробництва карамелі, який забезпечує найбільший прибуток від її реалізації.

2. При відгодівлі кожна тварина має отримати не менше 9 од. білків, 8 од. вуглеводів і 11 од. протеїну. Для складання раціону використовують два види кормів, представлених в таблиці.

Таблиця – Вихідні дані

Поживні речовини	**Кількість одиниць поживних речовин на 1 кг.**	
	корм 1	**корм 2**
білки	3	1
вуглеводи	1	2
протеїн	1	6

Вартість 1 кг корму першого виду – 4 у.о., другого – 6 у.о. Необхідно скласти денний раціон поживністю, що має мінімальну вартість.

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Вислоух К.С. Методичні вказівки до виконання комп’ютерного практикуму з дисципліни «Біометрія» для студентів спеціальності 152 «Метрологія та інформаційно-вимірювальна техніка» усіх форм навчання / Укладачі: С.П. Вислоух, К.С. Барандич, Волошко О.В. Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2017. 106 с.
2. Дичка І.А. Математичне моделювання систем і процесів: комп’ютерний практикум: навч. посіб. / І.А. Дичка, М.В. Онай, Р.А. Гадиняк. Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2018. 130 с.
3. Єгорова О.В. Методичні рекомендації до виконання лабораторних робіт та контролю знань з дисципліни «Біометрія» для здобувачів освітнього рівня магістр спеціальності 101 «Екологія» усіх форм навчання/ Укладачі: О.В. Єгорова, О.О. Мислюк. Черкаси: ЧДТУ, 2021. 72 с.
4. Наконечна Т.В., Нікулін О.В. Загальні та спеціальні розділи вищої математики для самостійної роботи студентів інженерних та природничо-наукових напрямків: навч. посіб. Дніпро: Біла К.О., 2016. 220 с.
5. Сікора Я. Б., Щехорський А.Й., Якимчук Б.Л. Методи оптимізації та дослідження операцій: навчальний посібник / Укладачі: Я. Б. Сікора, А.Й. Щехорський, Б.Л. Якимчук. Житомир: Вид-во ЖДУ ім. Івана Франка, 2019. 148 с.
6. Чепур С.С. Біометрія: Методичний посібник. Ужгород: Видавництво УжНУ «Говерла», 2015. 40 с.